

O logaritmech prakticky

Pavel Hrubý

Obsah

Úvod	1
Jak spočítáme logaritmus?	1
Poznámky k zápisu logaritmů	2
Co můžeme v logaritmu použít za čísla?	2
Vzorečky pro logaritmy	2
Použití vzorečků – příklady na logaritmy – čísla	3
Logaritmické rovnice	3
Logaritmické rovnice prvního typu	3
Logaritmické rovnice druhého typu – substituce	4
Příklady na procvičení	5
Logaritmické rovnice třetího typu – logaritmování	6
Příklady na procvičení	7
Logaritmické rovnice čtvrtého typu	7
Odkazy na příklady a zdroje	8

Úvod

Logaritmus nějakého čísla zapisujeme $\log_a x$. Například $\log_2 128$.

a nazýváme **základ logaritmu**, x je **argument logaritmu**.

Funkce logaritmus je svázána s exponenciální funkcí, tedy pro pochopení a odvození vztahů (vzorečků) pro logaritmy, je potřeba znát vzorečky pro exponenciální a mocninné funkce. Tedy je třeba umět počítat s mocninami a odmocninami.

Při řešení logaritmických rovnic zase musíme znát postupy a vzorečky pro řešení lineárních a kvadratických rovnic.

Jak spočítáme logaritmus?

Na kalkulačce (ale představte si, že kalkulačku nemáme) nebo podle vzorečku (definičního vztahu) pro logaritmus.

Platí vztah (tak se logaritmus zavádí, je to definice logaritmu)

D1: Když platí $\log_a x = y$, tak je to to samé jako $a^y = x$.

Takže jak spočítáme $\log_2 128$?

Hledáme nějaké y , pro které bude platit $2^y = 128$, zkusíme $y=1,2,3,\dots, 7$, pro sedmičku nám vyšlo, že platí $2^7 = 128$ a tedy $\log_2 128 = 7$.

Poznámky k zápisu logaritmu

Hodně často se vyskytují logaritmy se základem 10. Pak se základ nepíše, to znamená, že desítku vynecháváme a jen si myslíme (při výpočtu příkladu si 10 tam můžeme kdykoliv dopsat), tedy $\log x = \log_{10} x$. Takovýto logaritmus nazýváme **dekadický logaritmus**.

Pokud uvidíme zápis typu $\ln x$ nebo $\lg x$, pak je základem logaritmu speciální číslo e – Eulerovo číslo. Takový logaritmus nazýváme **přirozený logaritmus**. Číslo e má obrovský význam při výpočtech ve fyzice, biofyzice, přírodních vědách apod. Tedy $\ln x = \log_e x$. Číslo e je iracionální, tedy nelze je zapsat zlomkem a přibližně se rovná $e=2,718281828\dots$

Co můžeme v logaritmu použít za čísla?

Poněvadž máme **$\log_a x = y$ je to samé jako $a^y = x$** , pak pro základ a platí, že musí být větší než 0 a také, protože 1 na cokoliv je vždycky 1, nesmí být a rovno 1.

Tedy pro základ a platí, že se jedná o reálné číslo a **$a > 0$, $a \neq 1$** .

Také víme, že pro reálná čísla vždycky x vyjde kladné. Z toho plyne, že do logaritmu nemůžeme dosazovat záporná čísla a ani nulu. Proč nulu. No, pokud chceme jako výsledek umocňování dostat nulu, musíme umocňovat nulu a to nemůžeme, protože $a > 0$. Tedy **$x > 0$** .

Proto zápisy $\log(-5)$, $\log_{-2} 8$ jsou nesmyslné. Když nám tedy vyjde při řešení rovnice s logaritmy takovéto číslo, pak rovnice nebude mít řešení. To uvidíme dále.

Vzorečky pro logaritmy

Pro úpravy vztahů, kde se vyskytují logaritmy potřebujeme vzorečky, podobné jako přím práci s mocninami. Tyto vzorečky (vztahy) lze ze vztahů pro mocniny odvodit. Dělat to nebudeme 😊.

Ze vzorečků v rámečku tedy pomocí definičního vztahu pro logaritmus **$\log_a x = y$ je to samé jako $a^y = x$** , odvodíme:

$$\text{L1: } \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

(logaritmus součinu je součet logaritmů)

$$\text{L2: } \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

(logaritmus podílu je rozdíl logaritmů)

PŘÍKLADY 1.1

$$\log_3 9 =$$

$$\log_4 64 =$$

$$\log_{10} 1000 =$$

$$\log_{10} 10^9 =$$

$$\log_{10} 0,001 =$$

$$\log_2 \frac{1}{8} =$$

$$\log_{0,1} 10 =$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 =$$

$$\log_3 3^{124} =$$

$$\log_e e^{-5} =$$

OPAKOVÁNÍ – některé vzorečky pro mocniny a odmocniny

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

$$\text{L3: } \log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

(logaritmus mocniny je součin exponentu n a logaritmu)

To jsou nejzákladnější vzorečky a ostatní se dají z nich pak odvodit.

Jako třeba

$$\text{L4: } \log_a 1 = 0 \quad (\text{z definice D1})$$

$$\text{L5: } \log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x \quad (\text{ze vztahu L2 a L4})$$

$$\text{L6: } a^{\log_a x} = x \quad (\text{z definice D1})$$

$$\text{L7: } \log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x \quad (\text{kde se to tu vzalo?})$$

$$\text{L8: } \log_a a = 1 \quad (\text{z definice D1})$$

$$\text{L9: } \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x \quad (\text{z definice D1})$$

$$\text{L10: } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (\text{z definice D1})$$

Použití vzoreček – příklady na logaritmy – čísla

$$\log_3 \frac{1}{3} + \log_2 \sqrt{8} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice jsou rovnice, které obsahují logaritmy s neznámou.

Logaritmické rovnice prvního typu

Při řešení rovnici prvního typu pomocí logaritmických vzorců převedeme do tvaru, kdy na každé straně rovnice bude logaritmus se stejným základem. Pak už jen porovnáme argumenty logaritmů.

Využijeme vztah,

$$\text{V1: } \text{když } \log_a A = \log_a B \text{ pak } A = B$$

ale **POZOR**, pokud použijeme tento vztah, je vždy nutná zkouška.

Příklad

$$\log_3(2x + 3) - \log_3(x - 2) = 2$$

Budeme se snažit dostat na obou stranách rovnice logaritmus o základu 3 z nějakých výrazů.

Levou stranu upravíme podle L2, pravou stranu podle definice tj. $\log_3 9 = 2$

$$\log_3 \frac{2x + 3}{x - 2} = \log_3 9$$

A použijeme V1,

$$\frac{2x + 3}{x - 2} = 9$$

po úpravě dostaneme lineární rovnici

$$2x + 3 = 9 \cdot (x - 2)$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

Na konci výpočtu je důležité si ověřit, zda výsledné řešení odpovídá podmínkám plynoucím ze zadání – argument logaritmu musí být kladný.

Zkouška:

$$\log_3(2 \cdot 3 + 3) - \log_3(3 - 2) = 2$$

$$\log_3(9) - \log_3(1) = 2$$

$$2 - 0 = 2$$

$$2 = 2$$

Zkouška nám vyšla, a tedy výsledek vyhovuje podmínkám.

Nesmíme zapomenout **zapsat řešení úlohy** – množina kořenů dané rovnice $K = \{3\}$.

Teprve teď je příklad vyřešený.

Příklady na procvičení.

- | | | |
|----|-----------------------------|------------------|
| 1. | $\log_2(x + 7) = 6$ | $K = \{57\}$ |
| 2. | $\log_4(2x - 1) = 3$ | $K = \{32,5\}$ |
| 3. | $\log(3x - 2) = 2$ | $K = \{34\}$ |
| 4. | $\log_3(2x - 3) = 4$ | $K = \{42\}$ |
| 5. | $\log_5(x^2 - 2x + 1) = 2$ | $K = \{6; -4\}$ |
| 6. | $\log_2(x^2 + 7x - 14) = 4$ | $K = \{3; -10\}$ |
| 7. | $\log_3(x^2 - x - 3) = 3$ | $K = \{6; -5\}$ |
| 8. | $\log_4(x^2 + 9x + 24) = 1$ | $K = \{-5; -4\}$ |

- | | | |
|-----|--|--------------------------|
| 9. | $\log x^2 + \log x = 12$ | $K = \{10000\}$ |
| 10. | $\log x^3 - \log x = 4$ | $K = \{100\}$ |
| 11. | $\log_3 x^3 + 2 \cdot \log_3 x = 15$ | $K = \{27\}$ |
| 12. | $4 \cdot \log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 60$ | $K = \{64\}$ |
| 13. | $\log x^6 - \log x^{-2} = 8$ | $K = \{10\}$ |
| 14. | $\log x^4 + \log \frac{1}{x} = 2$ | $K = \{\sqrt[3]{100}\}$ |
| 15. | $\log \sqrt[3]{x^2} + \log x = 1$ | $K = \{\sqrt[5]{1000}\}$ |

OPAKOVÁNÍ KVADRATICKÁ ROVNICE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Diskriminant

$$D = b^2 - 4ac$$

Pokud je diskriminant nezáporný, pak

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Logaritmické rovnice druhého typu – substituce

Substitucí rozumíme nahrazení jednoho matematického výrazu jiným výrazem.

Vyřešíme následující rovnici

$$\log x = 3 - \frac{2}{\log x}$$

Že je to rovnice druhého typu poznáme tak, že se nám po vynásobení rovnice $\log x$ objeví tento logaritmus ve druhé mocnině. Na to vzoreček není.

Provedeme substituci (nahrazení) $\log x = y$ a dostaneme rovnici bez logaritmů

$$y = 3 - \frac{2}{y}$$

$$y^2 = 3y - 2$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

Tuto kvadratickou rovnici vyřešíme.

$$y_1 = 2 \quad y_2 = 1$$

Nyní provedeme takzvanou zpětnou substituci, protože naším úkolem není vyřešit y ale x . Takže dostaneme dvě elementární logaritmické rovnice. Substitute byla $\log x = y$ tak dosadíme za y :

$$\log x_1 = 2$$

$$\log x_2 = 1$$

A řešení pro x je

$$x_1 = 100$$

$$x_2 = 10$$

Poněvadž se logaritmus vyskytuje v rovnici ve jmenovateli zlomku je povinná zkouška nebo uvedení podmínek řešitelnosti původní rovnice. Tedy $\log x \neq 0$, $x > 0$. To obě řešení splňují, a tak můžeme napsat řešení $K = \{10, 100\}$ 😊.

Příklady na procvičení

- | | | |
|-----|--|-----------------|
| 16. | $2 \cdot \log x = \log(x + 6)$ | $K = \{3\}$ |
| 17. | $2 \cdot \log x = \log(x + 4) + \log 2$ | $K = \{4\}$ |
| 18. | $\log(x - 2) + \log 9 = 2 \cdot \log x$ | $K = \{3; 6\}$ |
| 19. | $\log_2(x + 7) = 2 + \log_2(x + 1)$ | $K = \{1\}$ |
| 20. | $\log_3 x - \log_3(x + 8) = 2$ | $K = \emptyset$ |
| 21. | $\log_4(2x - 7) - \log_4(x + 3) = 1$ | $K = \emptyset$ |
| 22. | $\log_3(x + 24) - \log_3 x = 2$ | $K = \{3\}$ |
| 23. | $\log_6(x - 2) + \log_6(x + 3) = 2$ | $K = \{6\}$ |
| 24. | $\log(x + 2) + \log(x + 5) = 2 \cdot \log x$ | $K = \emptyset$ |
| 25. | $\frac{\log(x^2 + 15)}{\log(x + 3)} = 2$ | $K = \{1\}$ |

26. $\log_7^2 x - \log_7 x = 0$	$K = \{1; 7\}$
27. $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$	$K = \{16; 0,25\}$
28. $\log_3 x + \frac{2}{\log_3 x} = -3$	$K = \left\{\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right\}$
29. $\log x + \frac{16}{\log x} = 8$	$K = \{10000\}$
30. $\log x^3 = \frac{27}{\log x}$	$K = \{1000; 0,001\}$
31. $\log^2 x + \log x^2 - 8 = 0$	$K = \{100; 0,0001\}$
32. $\log^2 x + \log x^6 + 9 = 0$	$K = \{0,001\}$
33. $\log(\log_5(\log_3 x)) = 0$	$K = \{243\}$
34. $\log_7(\log_2(\log_5(3x+2))) = 0$	$K = \{9\}$
35. $\ln(\log_2(\log_3(5x-1))) = 0$	$K = \{2\}$
36. $\log(\log_3(\log_2(4x+7))) = 0$	$K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Logaritmické rovnice třetího typu – logaritmování

Jedná se o rovnice, kde musíme logaritmovat obě strany rovnice. V podstatě se jedná o využití vztahu

když $A = B$ pak $\log_a A = \log_a B$, kde A a B jsou kladné výrazy.

Například rovnice

$$x^{\log x} = 1000 \cdot x^2$$

zlogaritmuje

$$\log(x^{\log x}) = \log(1000 \cdot x^2)$$

$$\log x \cdot \log x = \log 1000 + 2 \log x$$

$$\log^2 x - 2 \log x - 3 = 0$$

a to je rovnice druhého typu. Provedeme substituci $y = \log x$.

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\text{Vyjde: } y_1 = -1 \quad y_2 = 3$$

A provedeme zpětnou substituci

$$\log x_1 = -1 \rightarrow x_1 = 0,1$$

$$\log x_2 = 3 \rightarrow x_2 = 1000$$

Provedeme zkoušku. Všechny výrazy jsou po dosazení platné, takže dosazování do původní rovnice můžeme provést pro oba výsledky.

První výsledek:

$$0,1^{\log 0,1} = 1000 \cdot 0,1^2$$

$$0,1^{-1} = 1000 \cdot 0,01$$

$$10 = 10$$

Druhý výsledek

$$1000^{\log 1000} = 1000 \cdot 1000^2$$

$$1000^3 = 1000^3$$

Odpověď. Množina kořenů je $K = \{0,1; 1000\}$

Příklady na procvičení

$$37. \quad x^{\log x} = 10000 \quad K = \{100; 0,01\}$$

$$38. \quad x^{\log_2 x} = 512 \quad K = \left\{8; \frac{1}{8}\right\}$$

$$39. \quad x^{\log x} = 0,3 \quad K = \emptyset$$

$$40. \quad x^{\log_3 x} = 81 \quad K = \left\{9; \frac{1}{9}\right\}$$

$$41. \quad x^{\log x^2} = \sqrt{10} \quad K = \left\{\sqrt{10}; \frac{\sqrt{10}}{10}\right\}$$

$$42. \quad x^{2+\log x} = 1000 \quad K = \{10; 0,001\}$$

Logaritmické rovnice čtvrtého typu

Rovnice, které již nejde řešit bez kalkulačky či počítače. Lze je přibližně řešit graficky. Nevycházejí celá čísla nebo zlomky. Po úpravách rovnice dostaneme většinou výraz

$$\log_a A = B$$

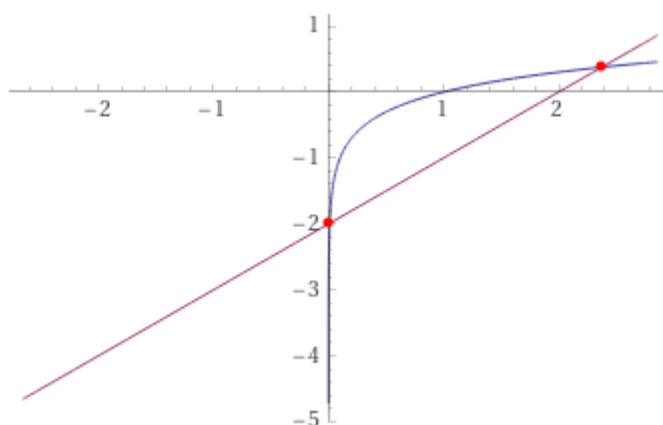
kde jak výraz A, tak výraz B obsahuje proměnou x.

Tedy např.

$$\log x = x - 2$$

Říkáme, že takováto rovnice není řešitelná analyticky. 😞

Grafické řešení rovnice (použit WolframAlfa online)



$$x \approx 0.0102385522814433\dots$$

$$x \approx 2.37581208759343\dots$$

Odkazy na příklady a zdroje

<https://skolaposkole.cz/matematika-ss/logaritmicke-rovnice>

https://hotelovkapodebrady.cz/moment/MAT_Funkce_a_rovnice/20_Rovnice_logaritmicke.pdf

<https://www.wolframalpha.com/>